فصل ۲

آنالیز ترکیبی

قوانین شمارش مبحثی ضروری و مورد استفاده در احتمال است و جزئی از آنالیز ترکیبیاتی که خود شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است محسوب می شود. شمارش کلیهٔ حالات وقوع شیء در محاسبه مقدار احتمال وقوع رخداد قسمتهائی از آن بسیار ارزنده است. ساده ترین اصول شمارش شمارش مجموعه های متناهی است، بنابراین با بحث در مورد پدیده های گسسته، اصول شمارش را بیان می کنیم.

۱.۲ جایگشت

برای بررسی احتمال وقوع یک امر، می بایست کلیهٔ موارد وقوع آن امر را بررسی نمود تا احتمال حاصل، جوابی مطمئن و قابل اعتماد باشد. جهت بررسی کلیهٔ موارد وقوع یک موضوع رعایت تمامی جوانب موضوع امری ضروری است. برای شروع موضوع از تعدادی شئ شروع می کنیم. به حالات گوناگون قرارگرفتن یک شیء در جاهای مختلف **جایگشت**[۱] اطلاق می شود. مثلاً جایگشت های حاصل از قرارگرفتن ارقام ۱ و ۲ و ۳ عبارتند از:

۱۲۳ و ۲۱۳ و ۳۲۱ و ۳۱۲ و ۱۳۲ و ۲۳۱

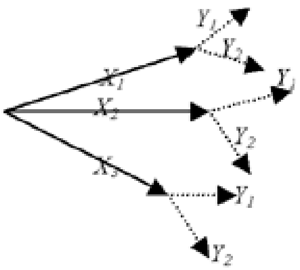
گاهی در یک امر چند راه حل وجود دارد. تعداد راه حل ها و انتخاب ها بستگی به شرایط موجود دارد. در حالات خاص اگر یک مساله دارای راه‌حل ها با شرایط یکسان و تحت فرض های یکسان باشد، می توان روی مسأله بحث نمود. برای مثال برای انتخاب یک نفر از بین ۵ نفر (وقتی بین افراد تمایزی قائل نشویم)، پنج راه وجود دارد و هر کدام را می توان بعنوان راه حل انتخاب نمود. در حالت کلی دو قاعدهٔ زیر را بکار می بریم.

اصل جمع: اگر عملی بتواند به m طریق **یا** n طریق انجام شود، آن عمل را می توان به $m+n$ طریق انجام داد.

بیان این اصل با مجموعه ها بدین صورت است که اگر مجموعهٔ A دارای m عنصر و مجموعهٔ B دارای n عنصر باشد، تمام دو مجموعهٔ $A \cup B$ دارای $m+n$ عنصر است. عموماً «یا» مرادف با $\cup$ است.

اصل ضرب: اگر عملی بتواند به m طریق و سپس عمل دیگری بعد از آن بتواند به n طریق انجام شود، کل آن دو عمل به $m \times n$ طریق انجام می شوند.

---
[۱] *Permutation*



اصل ضرب مبتنی بر دو عمل پیاپی بوده و با زبان مجموعه ها، اگر مجموعهٔ A دارای m عنصر و مجموعهٔ B دارای n عنصر باشد، مجموعهٔ $A \times B$ دارای $m \times n$ عنصر است. عموماً «و» مرادف با $\cap$ و «یا» مرادف با $\cup$ است. برای اصل ضرب می توان یک تعمیم (گسترش) یافت. برای مثال اگر تعداد مسیرهای «شیراز» به «اصفهان» به ۳ طریق ممکن باشد و برای سفر از «اصفهان» به «تهران» به ۴ طریق ممکن انجام شود، برای سفر از «شیراز» به «تهران» می توان ۱۲ روش در پیش گرفت.

تمرین ۱.۱.۲ کلاسی. با اعضاء مجموعهٔ $A = \{۲, ۴, ۶, \}$ چند زوج مرتب می توان ساخت؟

تعریف ۱.۱.۲ منظور از جایگشت های n شیء یعنی تعداد گروه‌هائی که با آن n شئ می توان تشکیل داد. تعداد قرارگیری n شئ کنار هم عبارتست از $P_n = n!$. در اینجا اختلاف گروه ها تنها در ترتیب قرار گرفتن آن n شئ کنار هم است.

مثال ۱.۱.۲ به چند طریق می توان ۵ کتاب را در یک قفسه جای داد.

حل. با در نظر گرفتن ۵ جای، چون در مکان اول می توان ۵ شیء قرار داد و در مکان دوم ۴ شیء و در مکان سوم ۳ شیء باقیمانده و در مکان چهارم ۲ شیء و در جای آخر تنها شیء باقیمانده را قرار می دهیم و طبق اصل ضرب $P_۵ = ۵! = ۱۲۰$.

مثال ۲.۱.۲ به چند طریق می توان ۵ کتاب فیزیک و ۴ کتاب ریاضی را در یک قفسه جای داد؟

حل. چون بین کتب فیزیک و کتب ریاضی تمایزی قائل نشده‌ایم، بنابراین تعداد ۹ شئ را بایست کنار هم قرار دهیم و کل جایگشت ها عبارت خواهد بود از $P_۹ = ۹! = ۳۶۲۸۸۰$.

مثال ۳.۱.۲ به چند طریق می توان ۵ کتاب فیزیک و ۴ کتاب ریاضی را در یک قفسه جای داد، چنانکه کتابهای فیزیک کنار هم و کتب ریاضی نیز کنار هم باشند.

حل. فرض می کنیم که کتب فیزیک کاملاً متمایز بوده و کتب ریاضی نیز متمایزند. تعداد جایگشت های کتب فیزیک کنار هم $P_۵ = ۵!$ و جایگشت های کتب ریاضی $P_۴ = ۴!$ است و از آنجا که این دو دسته (فیزیک و ریاضی) به $۲!$ طریق کنار هم قرار می گیرند بنابراین تعداد کل جایگشت ها عبارتست از $۵! \times ۴! \times ۲! = ۵۷۶۰$.

تمرین ۲.۱.۲ کلاسی. ۵ کتاب فیزیک و ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب شیمی را به چند طریق می توان در یک قفسه جای داد که کتابهای هر رشته پهلوی هم باشند؟

مثال ۴.۱.۲ شخصی دارای ۴ پیراهن مختلف و ۳ شلوار متفاوت به چند طریق می تواند لباس بپوشد؟

حل. با فرض تمایز بین پیراهن ها و تمایز بین شلوارها تعداد کل جایگشت ها عبارتست از $۴! \times ۳! = ۱۴۴$.

مطلب ۱.۱.۲ در برخی مسائل ممکن است شیئی تکرار شود و این تعداد جایگشت ها را تغییر خواهد داد.

تمرین ۳.۱.۲ کلاسی. با ارقام ۰ تا ۹، (الف) چند عدد چهار رقمی با تکرار می توان ساخت؟ (ب) چند عدد چهار رقمی بدون تکرار می توان ساخت؟ (ج) چند عدد زوج سه رقمی کمتر از ۲۰۰ می توان ساخت.

مثال ۵.۱.۲ مثال با ارقام ۱ و ۲ و ۵ و ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت که
الف) تکرار مجاز باشد. جواب $۵^۴$ ب) تکرار مجاز نباشد. جواب !۵

مطلب ۲.۱.۲ در یک حالت خاص، n شیء متمایز را می توان به $P_{n-1} = (n-1)!$ طریق در محیط یک دایره قرار داد.

مثال ۶.۱.۲ به چند طریق ٦ نفر می توانند حول یک میز بنشینند؟

حل. در این حالت خاص طبق مطلب قبل، جواب برابر $(٦-۱)! = ۵! = ۱۲۰$ خواهد بود.

۲.۲ ترکیب، ترتیب

منظور از جایگشت های k شئ از n شئ یعنی تعداد گروه‌هائی که با آن k شئ می توان تشکیل داد ($1 \leq k \leq n$). بطور قراردادی مانند جایگشت این اشیاء را از چپ به راست پهلوی هم قرار می دهیم.

تعریف ۱.۲.۲ اگر بخواهیم n شئ را در k مکان ($k \leq n$) قرار دهیم بطوریکه ترتیب[2] قرارگرفتن آن اشیاء مهم باشد، این عمل را می توان به $P_k^n = (n) \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times (n-k+1)$ طریق انجام داد. مقدار P_k^n را ترتیب k از n گوئیم و

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اگر ترتیب قرارگرفتن این n شئ، در k مکان ($k \leq n$) مختلف مهم، نباشد — اختلاف گروه ها تنها در اشیاء باشد — به این عمل **ترکیب**[3] گفته و با C_k^n نشان می دهیم [4] چون ترتیب قرارگیری k شیء مهم نیست، بنابراین تعداد $k!$ از P_k^n کسر می کنیم بنابراین

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{k!} \implies C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال ۱.۲.۲ چند عدد ۴ رقمی می توان با ارقام ۱ و ۳ و ۴ و ٦ و ۷ و ۹ و ۸ ساخت؟

حل. مسلماً در قرارگرفتن اعداد ترتیب مهم است $P_۴^۷ = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = ۷ \times ٦ \times ۵ \times ۴ = ۸۴۰$

تمرین ۱.۲.۲ کلاسی. با حروف کلمه *Combinatorial* چند کلمه چهار حرفی (بدون تکرار) و چند کلمه ۱۰ حرفی با تکرار می توان ساخت.

مثال ۲.۲.۲ به چند طریق می توان از بین ۵ کتاب ۳ کتاب جدا کرد؟

حل. چون تنها جدا کردن ۳ کتاب مهم بوده و ترتیب این سه مهم نیست پس $C_۳^۵ = \frac{۵!}{۳!(۵-۳)!} = ۱۰$

مثال ۳.۲.۲ به چند طریق می توان از بین ۵ مهرهٔ قرمز و ٦ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی جدا نمود؟

حل. طبق اصل ضرب $C_۳^۵ \times C_۲^٦ = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$

---

[2] *Arrangment*
[3] *Combination*
[4] در برخی مراجع C_k^n را با C_n^k و یا $C(n,k)$ و یا $C_{N,K}$ و یا $\binom{n}{k}$ نشان می دهند.

مثال ۴.۲.۲ کلاسی. از بین ۵۰ کارت با شماره های ۱ تا ۵۰ به چند طریق میتوان ۲ کارت با شماره های زوج انتخاب کرد؟

مثال ۵.۲.۲ با یک تیم ۱۱ نفره :

الف) به چند طریق می توانند یک صف ۱۱ نفره تشکیل دهند؟ $P_{11} = 11! = 39916800$

ب) به چند طریق یک صف ٦ نفره تشکیل می دهند؟ $P_6^{11} = \frac{11!}{5!} = 332640$

ج) به چند طریق می توانند گروه های ٦ نفره تشکیل دهند؟ $C_6^{11} = \frac{11!}{6!\times 5!} = 462$

مطلب ۱.۲.۲ در حالت خاص برای **جدا کردن** تعداد k شیء از n شیء می توان از قوانین زیر بهره برد:

الف) تعداد k شیء متمایز را می توان در حالتی که تکرار شیء مجاز باشد به n^k طریق در n جای قرار داد.

ب) تعداد k شیء غیرمتمایز را می توان در حالتی که تکرار شیء مجاز باشد به C_k^{n+k-1} طریق در n جای قرار داد.

ج) تعداد k شیء متمایز را می توان در حالتی که تکرار شیء غیرمجاز باشد به P_k^n طریق در n جای قرار داد.

د) تعداد k شیء غیرمتمایز را می توان در حالتی که تکرار شیء غیرمجاز باشد به C_k^n طریق در n جای قرار داد.

ه) تعداد راه‌های تقسیم k شئ یکسان بین n نفر برابر C_{n-1}^{n+k-1} بوده و اگر بخواهیم به هر نفر حداقل r شئ برسد برابر با $C_{n-1}^{n-k(r-1)-1}$ است.

تعریف ۲.۲.۲ اگر n شئ داشته باشیم که همگی از هم متمایز نیستند و n_1 شیء آنها از نوع اول (که ترتیب آنها با هم مهم نیست) و n_2 شیء آنها از نوع دوم و ... و n_k شیء آنها از نوع k–ام باشند. از آنجا که $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ این اشیاء را می توان به

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

طریق کنار هم قرار داد.

مثال ٦.۲.۲ سه نفر دورودی، چهار نفر بروجردی و سه نفر خرم آبادی به چند طریق می توانند روی ده صندلی در یک ردیف بنشینند چنانکه همشهری ها پهلوی هم باشند؟

حل. اگر جابجائی هم شهریها با هم، اهمیت داشته باشد وهمشهریهامتمایز باشند به $3! \times 4! \times 3! \times 3!$ طریق و اگر جابجائی هم شهریها با هم، اهمیت نداشته باشد $\frac{10!}{3!\times 4!\times 3!}$ طریق امکانپذیر است.

مطلب ۲.۲.۲ تعدادی ترکیباتی که می توان $m+n$ شیء را به دو گروه m تایی غیر متمایز و n تایی غیر متمایز تقسیم نمود، برابر $\frac{(m+n)!}{m!\times n!}$ است. در حالتی که $m = n$ باشد، این مقدار برابر $\frac{(2m)!}{(m!)^2\times 2!}$ است.

تمرین ۲.۲.۲ منزل.

۱) فاکتوریل عددی مانند n را بصورت $n! = (n) \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (3) \times (2) \times (1)$ تعریف می کنیم[5]. ثابت کنید $C_{n-1}^n = n$, $C_1^n = n$, $C_0^n = 1$, $P_1^n = n$, $P_{n-1}^n = n!$, $P_n^n = n!$, $1! = 1$, $0! = 1$

[5] این قاعده در محاسبهٔ اعداد کوچک جواب دقیق می دهد و برای محاسبهٔ فاکتوریل اعداد بزرگ فرمول **استرلینگ** را می توانید بصورت زیر بکار ببرید:

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$$

۲) چند عدد دو رقمی می توان با ارقام ۱ و ۲ و ۳ نوشت؟

۳) به چند طریق ۳ پسر و ۵ دختر می توانند در صف بایستند؟

۴) به چند طریق می توان ۷ درخت را دور یک میدان کاشت؟

۵) به چند طریق می توان ۴ توپ سفید و ۳ توپ سیاه و ۲ توپ سبز را در یک ردیف قرار داد چنانکه توپ های همرنگ کنار هم قرار گیرند؟

٦) به چند طریق با ارقام ۰ و ۱ و ۵ و ۹ می توان اعداد چهار رقمی (بدون تکرار) ساخت؟

۷) به چند طریق می توان ۱۵ نفر را در ۳ اتاق که ظرفیت اولی ۳ نفر، دومی ۷ نفر و ظرفیت سومی ۵ نفره است قرار داد؟

۸) با ارقام ۰ و ۲ و ۴ و ٦ و ۷ چند عدد چهاررقمی بیشتر از ۵۰۰۰ می توان ساخت که (آ) تکرار مجاز (ب) تکرار غیر مجاز.

۹) با حروف کلمه «احتمال» چند کلمه سه حرفی می توان ساخت که در آنها حرف «ت» آمده باشد.

۱۰) با حروف کلمه «آمار و احتمالات» چند کلمه ٦ حرفی می توان نوشت که حروف «م» و «ت» کنار هم قرار بگیرند.

۱۱) تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعهٔ ۸ عضوی را پیدا کنید؟

۱۲) از جعبه ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و ۱۰ مهره سیاه به چند طریق (بدون جایگذاری مهره‌ها) می توان الف) ۳ مهره انتخاب کرد؟ ب) ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه انتخاب کرد.

۱۳) در صورتیکه تکرار مجاز نباشد، با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ٦ و ۸ و ۹ چند عدد چهار رقمی می توان ساخت که بین ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ قرار بگیرند.

۱۴) از بین ۲۰ بازیکن فوتبال به چند طریق می توان یک تیم ۱۱ نفره تشکیل داد.

۱۵) از بین ۲۰ بازیکن فوتبال به چند طریق می توان دو تیم ۱۰ نفره تشکیل داد.

۱٦) با ۱۰ نقطه موجود در صفحه مختصات که هیچ سه نقطه ای از آنها بر یک خط قرار نمی گیرند چند مثلث می توان ساخت؟ اگر نقطه مشخصی را می خواهیم شامل باشد یعنی تعداد مثلثهائی که شامل نقطه مشخصی باشند.

۱۷) ۲۰ نفر را می توان به چند طریق به ۵ گروه ۴ نفره تقسیم نمود؟

۱۸) ۳ مهرهٔ متمایز را به چند طریق می توان در ۵ جعبه قرار داد؟ و اگر مهره ها غیرمتمایز باشند؟

۱۹) دو اتاق ۳ نفره و ۲ اتاق ۲ نفره را به چند طریق می توان به ۱۰ نفر اختصاص داد؟

۲۰) از میان ۲۰ نفر شامل ۱۸ مرد و ۲ زن، یک کمیتهٔ تبلیغاتی ۵ نفره تشکیل شده است. چند حالت ممکن است پیش آید که این دو زن حتماً جزء کمیته باشند؟